

Ongelmanratkaisua yhtälöillä

Tässä materiaalissa on kuusi kolmen yhtälön sarjaa, jotka on tarkoitettu käytettäväksi ongelmanratkaisutehtävinä oppilaspareille tai ryhmille. Niitä voi luontevasti käyttää esimerkiksi silloin, kun oppitunnilla tuntuu jäävän ylimääräistä aikaa. Niitä voi myös käyttää systemaattisesti ja suunnitellusti yhtäsuuruusmerkin ja muuttujan käsitteen merkityksen hahmottamiseksi. Opettajan johtama, koko luokan yhteinen keskustelu on tärkeää näiden merkitysten sisäistämisessä.

Tämän materiaalin tehtäväsarjat eroavat kuitenkin oppikirjoissa esiintyvistä tehtävistä siinä, että yhtälöitä ei voi mielekkäästi tulkita käyttäen yhtäsuuruusmerkin **operationaalista** merkitystä: yhtäsuuruusmerkki tarkoittaa sitä, että sen jälkeen tulee vastaus. Tehtävien avulla voidaan auttaa oppilaita hahmottamaan yhtäsuuruusmerkin **struktuurialista** merkitystä: sen molemmilla puolilla olevilla lausekkeilla on sama arvo. Tehtäväsarjojen kaksi ensimmäistä yhtälöä tähtäävät aina tähän.

Yhtälösarjojen kolmannella yhtälöllä on aina useita ratkaisuja, itse asiassa ääretön määrä ratkaisuja. Niiden kohdalla on tärkeää ensin etsiä muutamia konkreettisia ratkaisuja, mutta myös miettiä mitkä kaikki luvut toteuttavat yhtälön. Esimerkiksi yhtälö  =  + 5 toteutuu, kun siili on 2 ja kameleontti on 7, kun siili on 5 ja kameleontti on 10, kun siili on 4,5 ja kameleontti on 9,5 jne. Eli yhtälö toteutuu aina, kun kameleontti on viisi suurempi kuin siili. Kameleontin arvo riippuu siilin saamasta arvosta ja siilin arvo kameleontin saamasta arvosta. Ne ovat yhdessä **vaihtelevat muuttujat**.

Yhtälössä 🦎 + 🦎 = 🦎 kameleontti esiintyy kahdessa eri paikassa. Näissä eri paikoissa se kuitenkin edustaa aina samaa lukua kerrallaan. Kameleontti voi tässä yhtälössä olla mikä tahansa luku, mutta siilin täytyy olla nolla. Kameleontti on **yleinen luku** ja siili on yhteenlaskun **neutraalialkio nolla**. Yhtälö tarkoittaa, että kun mihin tahansa lukuun lisätään nolla, niin tulos on aina se luku itse.

Yhtälössä 🍏 · 🍊 = 🍊 · 🍏 omena ja appelsiini edustavat mitä tahansa lukua eli kumpikin ovat **yleisiä lukuja**. Omenat tarkoittavat aina kerrallaan samaa lukua, samoin appelsiinit. Tämä yhtälö itse asiassa ilmaisee yleisessä muodossa kertolaskun vaihdannaisuuden. Esimerkiksi $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ ja $12 \cdot 3,5 = 3,5 \cdot 12$ jne. Yleinen sääntö esitetään useimmiten kirjainten avulla seuraavasti $a \cdot b = b \cdot a$.

Yhtälössä 🚗 + ⚽ = 20 auto ja jalkapallo ovat yhdessä vaihtelevia muuttujia. Yhtälössä 🍄 = 🍄 · 💎 sieneni on yleinen luku ja timantti on kertolaskun neutraalialkio 1. Mikä tahansa luku kerrottuna yhdellä on tämä luku itse.

Ja yhtälössä $0 = 🐘 \cdot 0$ etana on mikä tahansa eli yleinen luku. Mikä tahansa luku kertaa nolla on yhtä suuri kuin nolla.

Yllä mainittuja nimityksiä ei tarvitse opettaa lapsille, mutta niiden roolista on hyvä keskustella. Opettaja voi käyttää eri tyyllisiä yhtälöitä haluamallaan tavalla. Hän voi vaikkapa näyttää samat yhtälöt kahdella eri tyyllillä tai sitten näyttää kaikki eri tyyliä samanaikaisesti. Näiden ongelmasarjojen avulla voidaan myös johdatella oppilaita kirjainsymbolin käyttöön yhtälönratkaisussa.

Mitkä luvut sopivat viivalle, kuvan tai kirjaimen paikalle?

$$6 = \underline{\quad} + 2$$

$$4 + 2 = \underline{\quad} + 3$$

$$\underline{\quad} = \underline{\quad} + 5$$

$$6 = \text{🍎} + 2$$

$$4 + 2 = \text{🍌} + 3$$

$$\text{🦎} = \text{🦔} + 5$$

$$6 = x + 2$$

$$4 + 2 = y + 3$$

$$x = y + 5$$

Mitkä luvut sopivat viivalle, kuvan tai kirjaimen paikalle?

$$12 = 7 + \underline{\quad}$$
$$\underline{\quad} - 5 = 8 + 3$$

$$12 = 7 + \text{🍓}$$
$$\text{🌸} - 5 = 8 + 3$$
$$\text{🦎} + \text{🐉} = \text{🦎}$$

$$12 = 7 + y$$
$$x - 5 = 8 + 3$$
$$a + b = a$$

Mitkä luvut sopivat viivalle, kuvan tai kirjaimen paikalle?

$$20 = \underline{\quad} - 10$$

$$11 + 7 = \underline{\quad} - 4$$

$$20 = \img alt="brown teddy bear" data-bbox="505 350 540 400"/> - 10$$

$$11 + 7 = \img alt="purple bunch of grapes" data-bbox="500 425 540 475"/> - 4$$

$$\img alt="red apple with diagonal stripes" data-bbox="365 495 400 545"/> \cdot \img alt="orange" data-bbox="430 495 465 545"/> = \img alt="orange" data-bbox="505 495 540 545"/> \cdot \img alt="red apple with diagonal stripes" data-bbox="570 495 605 545"/>$$

$$20 = y - 10$$

$$11 + 7 = x - 4$$

$$c \cdot d = d \cdot c$$

Mitkä luvut sopivat viivalle, kuvan tai kirjaimen paikalle?

$$\begin{aligned}100 &= 55 + \underline{\quad}\\25 - 5 &= 16 + \underline{\quad}\\ \underline{\quad} + \underline{\quad} &= 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}100 &= 55 + \text{🍰}\\25 - 5 &= 16 + \text{🐶}\\ \text{🚗} + \text{⚽} &= 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}100 &= 55 + z\\25 - 5 &= 16 + y\\x + y &= 20\end{aligned}$$

Mitkä luvut sopivat viivalle, kuvan tai kirjaimen paikalle?

$$28 = 2 \cdot \underline{\quad}$$
$$16 + \underline{\quad} = 18 + 12$$

$$28 = 2 \cdot \text{☂}$$
$$16 + \text{☀} = 18 + 12$$
$$\text{🍄} = \text{🍄} \cdot \text{💎}$$

$$28 = 2 \cdot x$$
$$16 + z = 18 + 12$$
$$a = a \cdot b$$

Mitkä luvut sopivat viivalle, kuvan tai kirjaimen paikalle?

$$48 = \underline{\quad} \cdot 4$$

$$100 - 65 = 25 + \underline{\quad}$$

$$0 = \underline{\quad} \cdot 0$$

$$48 = \text{🐟} \cdot 4$$

$$100 - 65 = 25 + \text{🎁}$$

$$0 = \text{🐉} \cdot 0$$

$$48 = y \cdot 4$$

$$100 - 65 = 25 + z$$

$$0 = b \cdot 0$$



Opetus- ja
kulttuuri-
ministeriö



LUMA-KESKUS LAPPI
OSA LUMA-KESKUS SUOMEA



LAPIN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF LAPLAND