



Opetus- ja
kulttuuri-
ministeriö



LUMA-KESKUS SUOMI



LAPIN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF LAPLAND

Nalleongelmia

Nalleongelmia-materiaali koostuu kolmesta kokonaisuudesta, jotka järjestyksessä tehtynä johdattelevat algebrallisen yhtälönratkaisun periaatteeseen: Yhtälön molemmille puolille voidaan tehdä sama laskutoimitus ja silloin yhtäsuuruus säilyy. Monisteessa Nalleongelmia A tarvitaan tasapainovaakaa sekä pieniä muovisia nalleja, jotka painavat 4 g, 8 g ja 12 g. Monisteessa Nalleongelmia B nallejen painoja selvitetään piirtämällä. Ja moniste Nalleongelmia C johdattaa ratkaisemaan algebrallisia yhtälöitä symbolisesti, nojaten kuitenkin edellä tehtyyn konkreettiseen työskentelyyn. Viimeisen monisteen lopussa on vielä haaste irrottautua konkreettisesta vaakamallista.

Monisteiden mukainen työskentely sopii kuudesluokkalaisille ja se täydentää projektissa Alakoulun aritmetiikkaa uusin silmin viidesluokkalaisia varten kehitettyä Yhtälönratkaisu-materiaalia.

Nalleongelmia A



Aluksi: Tarkista, että tyhjä vaaka on tasapainossa.

Ykköskuution paino (massa) on yksi gramma. Aseta kumpaankin vaakakuppiin yhtä monta ykköskuutiota. Onko vaaka tasapainossa? Milloin vaaka on tasapainossa ja milloin ei?

1. Aseta vaa'an vasemmalle puolelle kaksi pikkunallea ja kolme ykköskuutiota. Aseta oikealle puolelle yksi pikkunalle ja 7 ykköskuutiota. Onko vaaka tasapainossa? Ratkaise pikkunallen paino ohjeen mukaisesti.

Ohje: **Voit tehdä samoja toimenpiteitä (yksi kerrallaan) kummallekin puolelle vaakaa.** Voit esimerkiksi ottaa pois kummaltakin puolelta kolme ykköskuutiota tai kaksi samankokoista nallea. **Niiden jälkeen vaa'an tulee edelleen olla tasapainossa.** Anna vaa'an heilumisen rauhassa hiljentyä, jotta näet tuloksen. **Tavoitteena on saada järjestettyä yksi nalle yksin toiselle puolelle vaakaa.** Kun vaaka on siinä tilanteessa ja edelleen tasapainossa, saadaan selville pikkunallen paino. Kirjoita ylös järjestyksessä ne toimenpiteet, jotka teit.

Kummaltakin puolelta

--

Pikkunallen paino on _____ g.

2. Aseta vaa'an vasemmalle puolelle kolme keskikokoista nallea ja kaksi ykköskuutiota. Aseta oikealle puolelle kaksi keskikokoista nallea ja kymmenen ykköskuutiota. Kuten edellä, ratkaise keskikokoisen nallen paino.

Kummaltakin puolelta

Keskikokoisen nallen paino on _____ g.

3. Aseta vaa'an vasemmalle puolelle kaksi isoa nallea ja 12 ykköskuutiota. Aseta oikealle puolelle kolme isoa nallea. Kuten edellä, ratkaise ison nallen paino.

Kummaltakin puolelta

Ison nallen paino on _____ g.

4. Aseta vaa'an vasemmalle puolelle neljä keskikokoista nallea ja yksi ykköskuutio. Aseta oikealle puolelle kaksi keskikokoista nallea ja 17 ykköskuutiota. Kuten edellä, ratkaise keskikokoisen nallen paino. Vihje: Jos toisella puolella on kaksi nallea ja toisella puolella vain ykköskuutioita, niin voit myös kokeilla puolittaa vaakakupin sisällön.

Kummaltakin puolelta

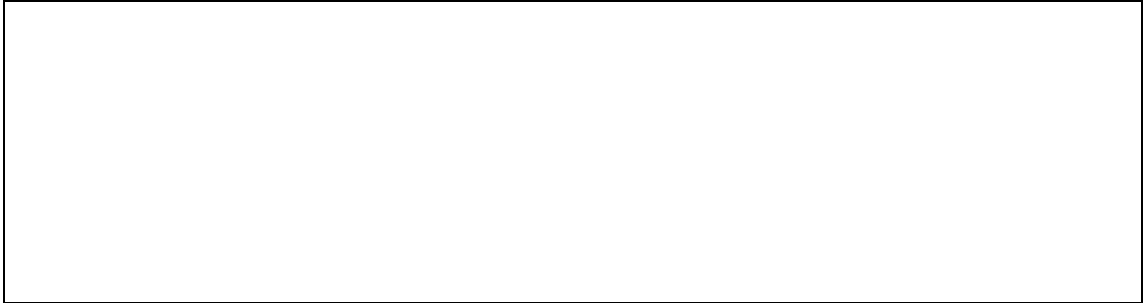
Keskikokoisen nallen paino on _____ g.

5. Aseta vaa'an vasemmalle puolelle kolme pikkunallea ja 12 ykköskuutiota. Aseta oikealle puolelle kuusi pikkunallea. Kuten edellä, ratkaise pikkunallen paino. Vihje: Jos toisella puolella on kolme nallea ja toisella puolella vain ykköskuutioita, niin voit myös kokeilla pienentää kummankin vaakakupin sisällön kolmasosaan.

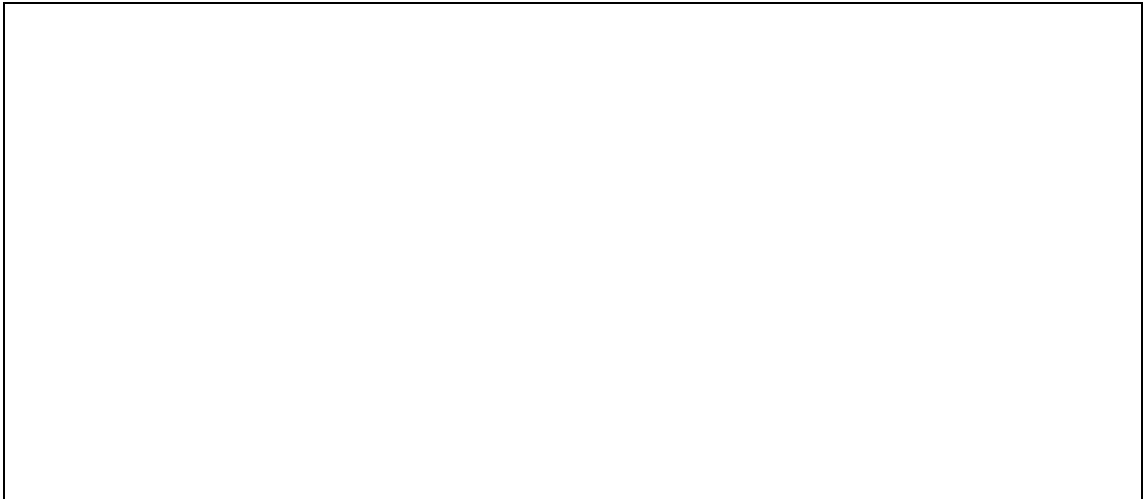
Kummaltakin puolelta

Pikkunallen paino on _____ g.

6. Keksi oma yhtälötehtävä ratkaistavaksi vaa'an ja välineiden avulla. Anna se toverisi ratkaistavaksi.



Kummaltakin puolelta

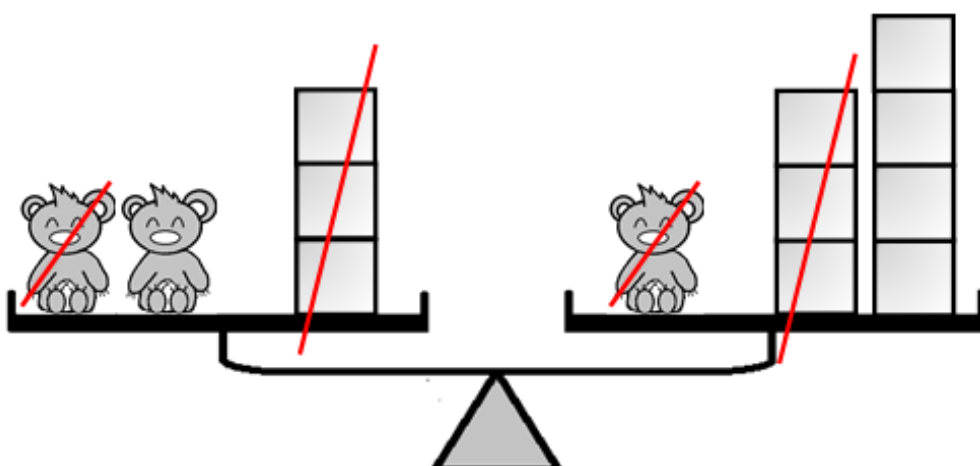


Nallen paino on _____ g.

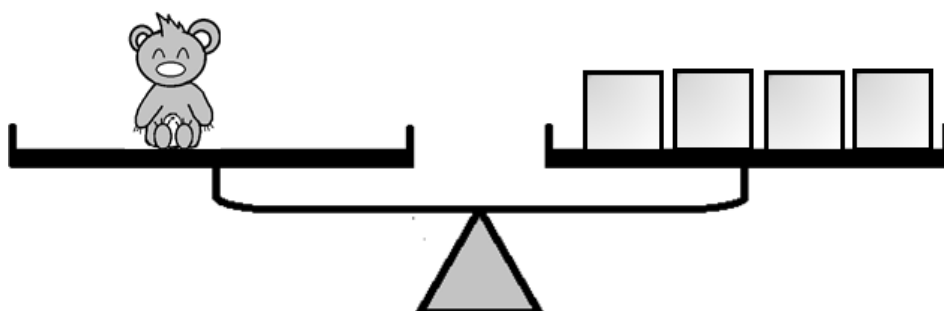
Nalleongelmia B

Muistele miten ratkaisit ensimmäisen nalleongelman:

Aseta vaa'an vasemmalle puolelle kaksi pikkunallea ja kolme ykköskuutiota. Aseta oikealle puolelle yksi pikkunalle ja 7 ykköskuutiota. Ratkaise pikkunallen paino ykköskuutiaina.

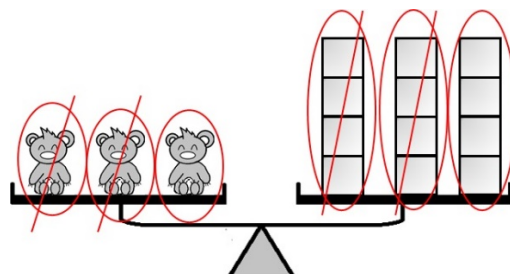
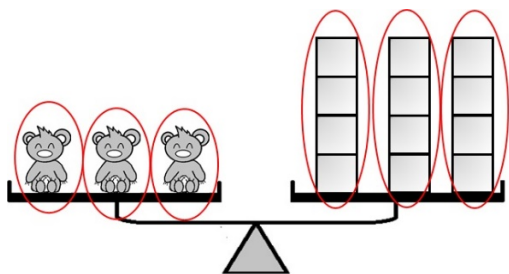
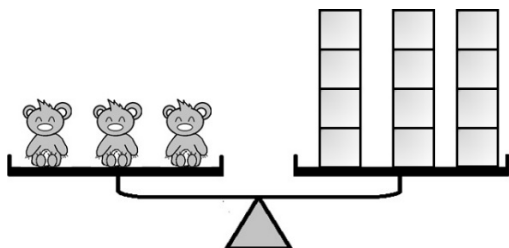


Yksi tapa ratkaista tehtävä on ottaa ensin pois kummaltakin puolelta yksi nalle ja sen jälkeen poistaa kummaltakin puolelta kolme ykköskuutiota. Kuviossa tehtävän ratkaisu on esitetty piirtämällä.



Kummankin toimenpiteen jälkeen vaaka on tasapainossa ja lopussa selviää, että yksi pikkunalle painaa yhtä paljon kuin neljä ykköskuutiota eli 4 g.

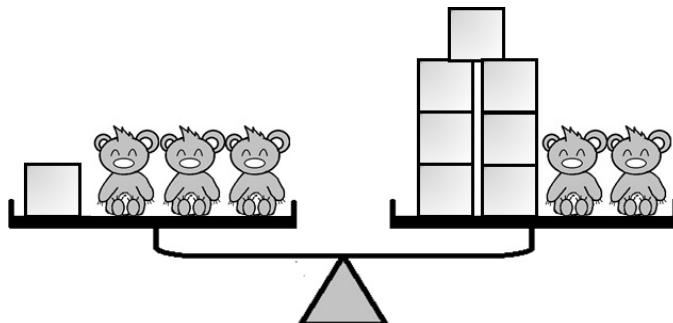
Kummankin vaakakupin sisältö voidaan myös puolittaa tai vaikka jakaa kolmella.



Tämäkin nalle painaa yhtä paljon kuin neljä ykköskuutiota eli 4 g.

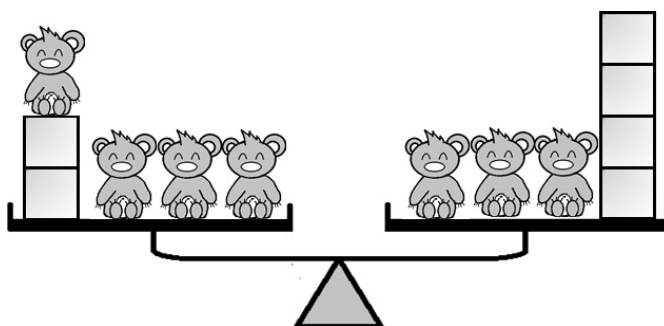
Ratkaise seuraavissa tehtävissä nallen paino piirtämällä. Yhden kuution paino on yksi gramma.

1.



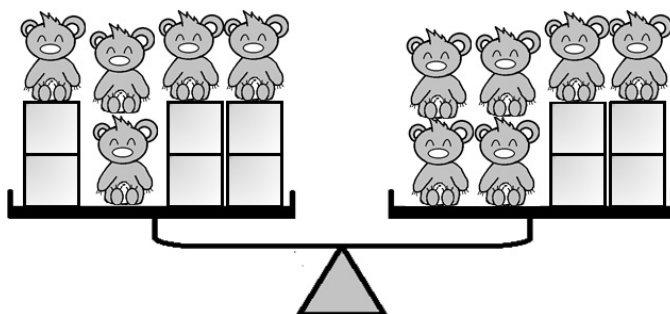
Nallen paino on ____ g.

2.



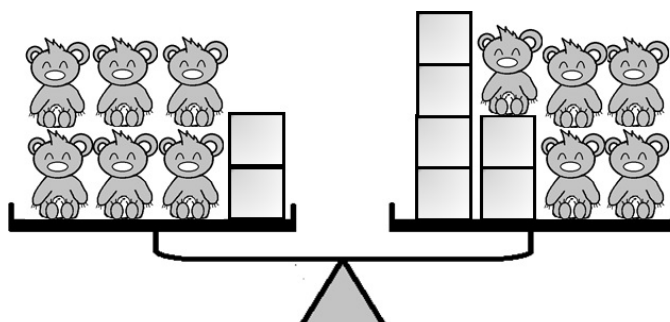
Nallen paino on ____ g.

3.



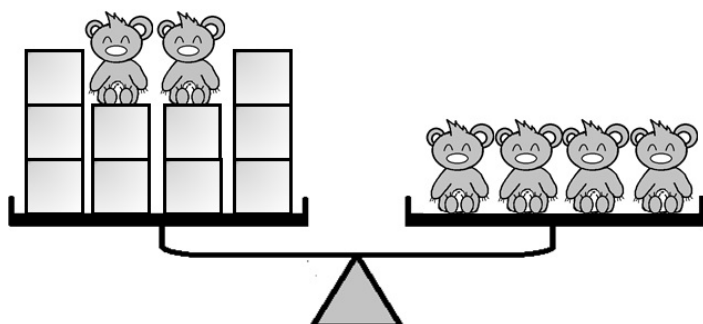
Nallen paino on ____ g.

4.



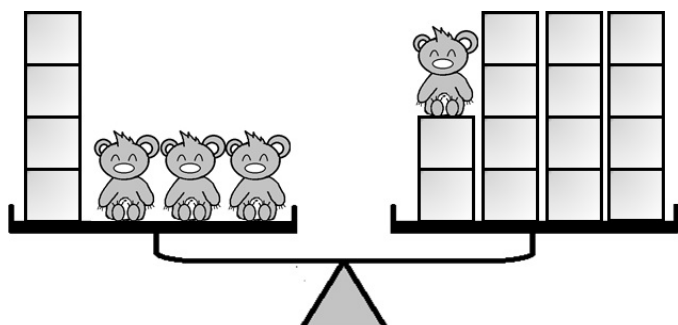
Nallen paino on ____ g.

5.



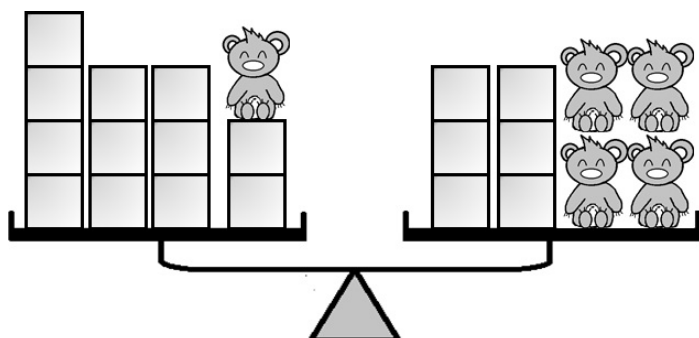
Nallen paino on _____ g.

6.



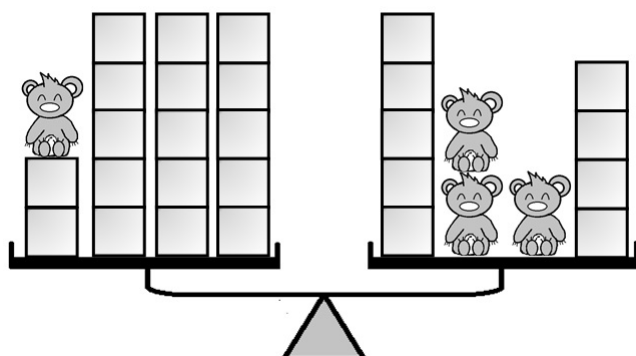
Nallen paino on _____ g.

7.



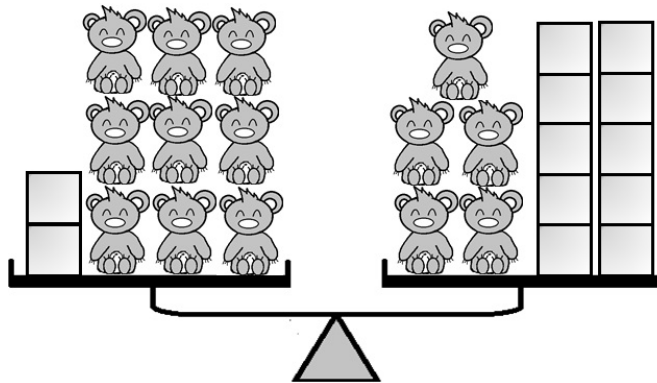
Nallen paino on _____ g.

8.



Nallen paino on _____ g.

9.



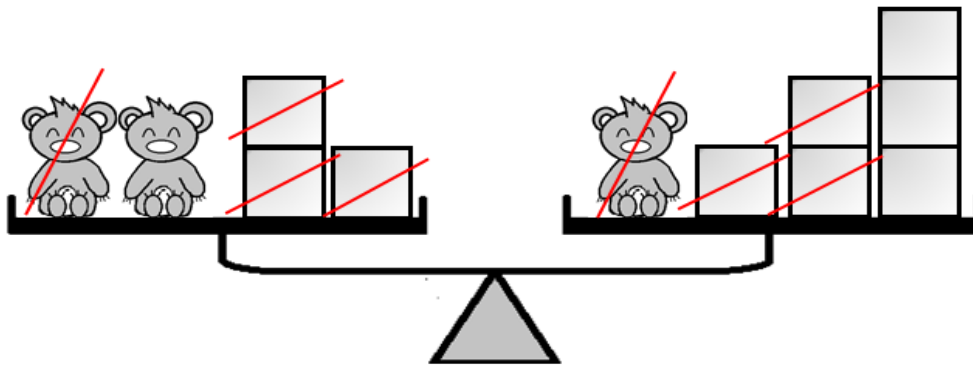
Nallen paino on _____ g.

10. Piirrä oma vaakatehtävä ja anna se kaverillesi ratkaistavaksi.

Vastaukset:

1) 6 g, 2) 2 g, 3) 2 g, 4) 4 g, 5) 5 g, 6) 5 g, 7) 2 g, 8) 2 g, 9) 2 g

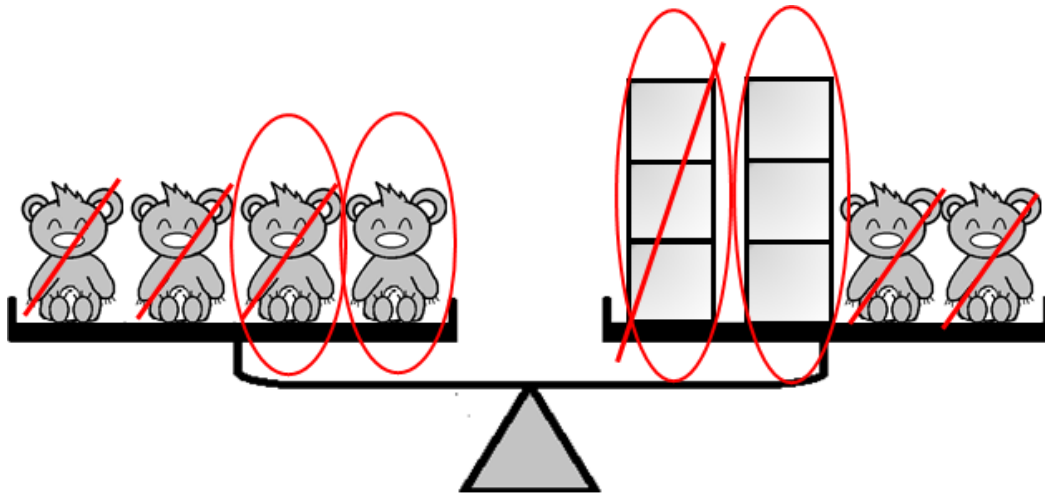
Nalleongelmia C



Jos merkitään **yhden nallen painoa** symbolilla N, niin yllä oleva tehtävä voidaan kirjoittaa yhtälönä $N + N + 3 = N + 6$ eli $2 \cdot N + 3 = N + 6$.

Ratkaistaan tuo yhtälö käyttäen matemaattisia merkintöjä.

$2 \cdot N + 3 = N + 6$	- N	Otetaan pois yksi nalle kummaltakin puolelta.
$N + 3 = 6$	- 3	Otetaan pois kolme ykköskuutiota kummaltakin puolelta.
$N = 3$		Nallen paino on kolme (grammaa).



Ratkaistaan vielä toinen tehtävä yhtälön avulla $N + N + N + N = N + N + 6$
eli $4 \cdot N = 2 \cdot N + 6$.

$$4 \cdot N = 2 \cdot N + 6 \quad | - 2 \cdot N$$

Otetaan pois kaksi nallea kummaltakin puolelta.

$$2 \cdot N = 6 \quad | : 2$$

Puolitetaan vaa'an kummankin puolen paino.

$$N = 3$$

Nallen paino on kolme (grammaa).

Ratkaise seuraavat yhtälöt vihkoosi matemaattisesti. Tarvittaessa käytä piirroksia apuna. Anna vastauksena olevat luvut muodossa $N = 8$, ilman yksikköä.

1. $2 \cdot N + 5 = N + 10$
2. $N + 10 = 2 \cdot N + 3$
3. $3 \cdot N + 2 = 2 \cdot N + 5$
4. $4 \cdot N = 2 \cdot N + 8$
5. $100 \cdot N = 95 \cdot N + 35$
6. $80 + 10 \cdot N = 20 \cdot N + 40$

Vastauksia:

1) $N = 5$, 2) $N = 7$, 3) $N = 3$, 4) $N = 4$, 5) $N = 7$, 6) $N = 4$

Tehtävät 7 – 10 ovat bonustehtäviä. Niiden ratkaisussa sinun tulee laajentaa ajattelusi hieman pidemmälle. Muuttuja x ei enää tarkoita nallen painoa, vaan jotain lukua. Vaa'an tasapainoa vastaa nyt se, että yhtälön vasen puoli ja oikea puoli ovat yhtä suuria lukuja. Voit vähentää tai lisätä kummallekin puolelle saman luvun tai lausekkeen, jolloin yhtäsuuruus säilyy. Voit myös jakaa tai kertoa yhtälön molemmat puolet samalla luvulla (paitsi nolllalla). Näissä tapauksissa yhtäsuuruus säilyy. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

7) $7 \cdot x - 3 = 6 \cdot x + 2$

8) $2 \cdot x + 10 = x - 5$

9) $84 - x = 40 + x$

10) $\frac{1}{3} \cdot x + 2 = x + 1$

Vastauksia:

7) $x = 5$ 8) $x = -15$, 9) $x = 22$, 10) $x = \frac{3}{2}$